3.5.3 Ekvivalentní úpravy

Předpoklady: 030502

Jednoduchými rovnicemi jsme se zabývali už v loňském roce.

Př. 1: Vypočti rovnice. Každou rovnici řeš tak, aby vedle ní zůstalo volné místo.

a) $2(x-2)=3$ b) $2x-2=5x+7$ c) $\frac{x}{2}+1=\frac{1}{2}$

a) $2(x-2)=3 \quad /:2$

$x-2=\frac{3}{2} \quad /+2$

$x=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

b) $2x-2=5x+7 \quad /-2x$

$-2=3x+7 \quad /-7$

$-9=3x$

$3x=-9 \quad /:3$

$x=-3$

c) $\frac{x}{2}+1=\frac{1}{2} \quad /\cdot 2$

$x+2=1 \quad /-2$

$x=-1$

Nastal čas si ujasnit některé věci, které jsme zatím řešili spíše intuitivně.

Dva číselné výrazy, mezi kterými je znaménko "rovná se", označujeme jako **rovnost**.
Příklady rovností:

- $2=\frac{4}{2}$,
- $2+3=6-1$,
- $2-\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}$

Pokud jsou hodnoty na obou stranách stejné, říkáme, že jde o **platnou rovnost**. Pokud se hodnoty na obou stranách liší, jde o rovnost neplatnou a znaménko rovností škrtáme:

$2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\neq 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

Př. 2: Které z následujících rovností jsou platné?

a) $6=(1+2)(4-1)$ b) $\sqrt{9+7}=(-2)^2$ c) $\sqrt{-9}=-3$

a) $6=(1+2)(4-1)$
$6=3\cdot 3$
$6\neq 9 \Rightarrow$ neplatná rovnost.

b) $\sqrt{9+7}=(-2)^2$
$\sqrt{16}=4$
$4=4 \Rightarrow$ platná rovnost

c) $\sqrt{-9}=-3$
$\sqrt{-9}$ nejde spočítat $\Rightarrow$ neplatná rovnost.

Co představuje rovnice $x+3=6$:
Hledáme čísla, pro která dosazením za proměnnou získáme platnou rovnost.

- x - proměnná,
- řešit rovnici - najít všechna čísla, která můžeme dosadit, abychom získali platnou rovnost,
- kořeny - nalezená čísla, pro která rovnost platí

Řešení rovnice $x+3=6$:
$x+3=6 \quad /-3$
$x=3$
Kořenem rovnice $x+3=6$ je číslo 3 (píšeme $K=\{3\}$).
Zkouška: dosazení vypočtené hodnoty místo proměnné a upravení získaných výrazů tak, abychom mohli rozhodnout, zda jsme dosazením získali platnou rovnost.

Zkouška rovnice $x+3=6$.
$L: x+3=3+3=6$
$P: 6$
$L=P$ Ověřili jsme, že číslo 3 je řešením rovnice $x+3=6$.

Př. 3: Jaké úpravy jsme používali při řešení rovnic v prvním příkladu?

Rovnice jsme:

- násobili číslem: $\frac{x}{2}+1=\frac{1}{2} \quad /\cdot 2$,
- dělili číslem: $2(x-2)=3 \quad /:2$,
- přičítali jsme číslo: $x-2=\frac{3}{2} \quad /+2$,
- odečítali jsme číslo $-2=3x+7 \quad /-7$,
- přičítali jsme výraz s neznámou: $2x-2=5x+7 \quad /-2x$.

Také jsme prohazovali levou a pravou stranu rovnice: $-9=3x \Rightarrow 3x=-9$.

Uvedené úpravy se označují jako ekvivalentní - nemění totiž nic na tom, zda rovnost, kterou získáme dosazením za neznámou, je platná nebo ne.
Například přičtení čísla 2:

* z platné rovnosti získáme platnou rovnost: $3=3 \quad /+2 \;\Rightarrow\; 5=5$,
* z neplatné rovnosti získáme neplatnou rovnost: $2\neq 3 \quad /+2 \;\Rightarrow\; 4\neq 5$.

Př. 4: Existuje číslo, kterým rovnice nesmíme násobit, abychom neplatnou rovnost nezměnili na platnou. Které číslo to je (kterým číslem nesmíme rovnice násobit)?

Jde o číslo 0. Když vynásobíme jakoukoliv rovnost nulou, obě strany se vynulují a rovnost bude platná, například $2\neq 3 \quad /\cdot 0 \;\Rightarrow\; 0=0$.

Mezi ekvivalentní úpravy rovnice patří:

přičtení (odečtení) libovolného reálného čísla (a proto můžeme k rovnici přičíst nebo od ní odečíst i libovolný výraz obsahující neznámou),

vynásobení (vydělení) rovnice libovolným nenulovým číslem (a proto můžeme rovnici vynásobit nebo vydělit pouze výrazem s neznámou, o kterém víme, že se nerovná nule),

prohození pravé a levé strany.

Změny rovností můžeme sledovat i u našich rovnic.

a) $2(x-2)=3$ Dosadíme $x=\frac{7}{2}$ (rovnosti by měly být platné).

$2(x-2)=3 \quad /:2$ $\qquad 2\left(\frac{7}{2}-2\right)=3 \;\Rightarrow\; 2\left(\frac{3}{2}\right)=3 \;\Rightarrow\; 3=3$

$x-2=\frac{3}{2} \quad /+2$ $\qquad \frac{7}{2}-2=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$ $\qquad \frac{7}{2}=\frac{7}{2}$

Dosadit můžeme i číslo, které není řešením (a pro které bychom měli získávat jen neplatné rovnosti).

a) $2(x-2)=3$ Dosadíme $x=1$ (rovnosti by měly být neplatné).

$2(x-2)=3 \quad /:2$ $\qquad 2(1-2)\neq 3 \;\Rightarrow\; 2(-1)\neq 3 \;\Rightarrow\; -2=3$

$x-2=\frac{3}{2} \quad /+2$ $\qquad 1-2\neq\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; -1=\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$ $\qquad 1=\frac{7}{2}$

Př. 5: Otestuj dosazováním, jak se mění rovnosti při řešení rovnice $2x-2=5x+7$.

b) $2x-2=5x+7$ Dosadíme $x=-3$ (rovnosti by měly být platné).

$2x-2=5x+7 \quad /-2x$ $\qquad 2(-3)-2=5(-3)+7 \;\Rightarrow\; -6-2=-15+7 \;\Rightarrow\; -8=-8$

$-2=3x+7 \quad / -7$ $\qquad$ $-2=3(-3)+7 \Rightarrow -2=-9+7 \Rightarrow -2=-2$

$-9=3x$ $\qquad$ $-9=3(-3) \Rightarrow -9=-9$

$3x=-9 \quad / :3$ $\qquad$ $3(-3)=-9 \Rightarrow -9=-9$

$x=-3$ $\qquad$ $-3=-3$

Dosadit můžeme i číslo, které není řešením (a pro které bychom měli získávat jen neplatné rovnosti).

b) $2x-2=5x+7$ $\qquad$ Dosadíme $x=0$ (rovnosti by měly být neplatné).

$2x-2=5x+7 \quad / -2x$ $\qquad$ $2\cdot 0-2\neq 5\cdot 0+7 \Rightarrow -2\neq +7$

$-2=3x+7 \quad / -7$ $\qquad$ $-2\neq 3\cdot 0+7 \Rightarrow -2\neq 7$

$-9=3x$ $\qquad$ $-9\neq 3\cdot 0 \Rightarrow -9\neq 0$

$3x=-9 \quad / :3$ $\qquad$ $3\cdot 0\neq -9 \Rightarrow 0\neq -9$

$x=-3$ $\qquad$ $0\neq -3$

Př. 6: Dosaď postupně čísla $\{0;1;2;3\}$ do rovnice $2(x+1)+x=2x+4$. Která z nich jsou jejím řešením?

Dosazujeme:

- $x=0$:
  $2(0+1)+0=2\cdot 0+4$
  $2\neq 4$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 0 není řešením rovnice,
- $x=1$:
  $2(1+1)+1=2\cdot 1+4$
  $5\neq 6$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 1 není řešením rovnice,
- $x=2$:
  $2(2+1)+2=2\cdot 2+4$
  $8=8$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 2 je řešením rovnice,
- $x=3$:
  $2(3+1)+3=2\cdot 3+4$
  $11\neq 10$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 3 není řešením rovnice.

Řešením rovnice je číslo 2.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je procvičování pro žáky, kteří měli problém s prvním příkladem.

Shrnutí: K rovnicím můžeme přičítat i odečítat libovolné číslo. Násobit i dělit můžeme rovnice všemi čísly různými od nuly.